ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX
DURÉE : 4 Heures – COEFFICIENT : 4 (option C)

PREMIÈRE PARTIE.

$\mathcal{A}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$. Si u est une telle suite, on pourra noter indifféremment u_k pour u(k) pour tout k de $\mathbb{N}^*$, selon l'usage, et $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ abrégé en (u_k).

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites u de $\mathcal{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{R})$ à termes positifs et telles que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge et de somme égale à 1, c'est-à-dire vérifiant les conditions :

$$L_1 : \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k \geq 0 \quad ; \quad L_2 : \sum_{k\geq 1} u_k = 1.$$

1) Soit u dans $\mathcal{L}$. On lui associe l'application G_u définie par :

$G_u(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$;

$G_u(x) = \sum_{n\geq 1} u_n . x^n$ si $x \in [0,1[$;

$G_u(x) = 1$ si $x \in [1, +\infty[$.

a) Montrer que G_u est bien une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, croissante et positive, et continue a priori sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) On veut aussi montrer que G_u est continue en 1.

Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$, tel que : $\sum_{k\geq N+1} u_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Achever la démonstration après avoir justifié que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq 1 - G_u(x) \leq \sum_{k=1}^{N} u_k.[1 - x^k] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2) Soit $u = (\frac{1}{2^k})_{k\in\mathbb{N}^*}$. Vérifier que $u \in \mathcal{L}$, et calculer $G_u(x)$ pour $x \in [0,1]$.

3) Soit $u = (\frac{1}{k.(k+1)})_{k\in\mathbb{N}^*}$.
Vérifier que u est dans $\mathcal{L}$, et calculer $G_u(x)$ pour $x \in]0,1[$.

4) Soit p un entier fixé, avec $p \geq 1$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $a_k = \frac{1}{k.(k+1)...(k+p)} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{p}(k+j)}$

(i) Déterminer une constante réelle λ de telle sorte que $u = (\lambda.a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ soit dans $\mathcal{L}$, pour cela, on pourra éventuellement utiliser la banalité : $1 = \dfrac{(k+p)-k}{p}$

(ii) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $x \in]0,1[$, on note : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{\prod_{j=0}^{n}(k+j)}$.

Préciser $g_0(x)$ et déterminer une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$.

(iii) En déduire une expression de $G_u(x)$ pour $x \in]0,1[$ lorsque $p = 2$.

(iv) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_k en fonction de $\displaystyle\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{(k+j)} C_p^j$.

(v) En déduire une expression de $G_u(x)$ pour $x \in]0,1[$ grâce à $\ln(1-x)$ et aux polynômes définis par : $H_0(X) = 0$, et $H_n(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Retrouver ainsi une expression de $G_u(x)$ pour $x \in]0,1[$ lorsque $p = 2$.

5) Soit $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, croissante, telle que: $S_0 = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

(i) Montrer que la suite $u = (S_k - S_{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\mathcal{L}$.

(ii) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par :

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} S_n . z^n$$

(iii) Exprimer $G_u(x)$ pour $x \in]0,1[$, en fonction de $F(x)$.

(iv) Donner un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_k = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{k^2 - k + 1}\right)$.

(i) Montrer que la suite $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\mathcal{L}$.

(ii) Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \operatorname{Arctan}(n).x^n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

7) On considère la série entière définie par : $H(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) z^n$

(i) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.

(ii) Déterminer le rayon de convergence de la série entière H.
(iii) Calculer H(x) pour $x \in]-1,1[$.
(iv) Donner un équivalent simple de $\sum_{n \geq 1} \ln(n).x^n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

DEUXIÈME PARTIE.

1) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, $\mathcal{T}$, **P**) et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $x_k = \mathbf{P}(X = k)$.

On note $\widetilde{X}$ une variable aléatoire définie sur (Ω, $\mathcal{T}$, **P**) à valeurs dans [0,1], telle que : $\forall t \in [0,1[\ ,\ \mathbf{P}(\widetilde{X} \leq t) = \sum_{k \geq 1} x_k .t^k$

(i) Déterminer une densité de $\widetilde{X}$.
(ii) On suppose que X admet une espérance notée **E**(X).
Comparer $\mathbf{E}(\widetilde{X})$ avec $\mathbf{E}(\frac{X}{X+1})$: on justifiera le résultat avec soin, en cherchant à encadrer $\partial_n = \mathbf{E}(\widetilde{X}) - \sum_{k=1}^{n} (\frac{k.x_k}{k+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre p : $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $x_k = p.q^{k-1}$, où $q = 1 - p$.

Déterminer une densité de $\widetilde{X}$ et son espérance.

3) Soit $\lambda > 0$, et on suppose que $X - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre λ : $\mathcal{P}(\lambda)$.

Déterminer une densité de $\widetilde{X}$ et son espérance.

4) Soient $p \in]0,1[$,et $N \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $X - 1$ suit une loi binômiale de paramètres N et p : $\mathcal{B}(N,p)$.

Déterminer une densité de $\widetilde{X}$ et son espérance.

5) Soient $p \in]0,1[$,et $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que X suit une loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq r, \quad \mathbf{P}(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r.q^{k-r}.$$

où $q = 1 - p$. Déterminer une densité de $\widetilde{X}$.

TROISIÈME PARTIE.

1) Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, positive, telle que $f(t) = 0$ pour $t<0$, et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t).dt$ existe et vaut 1.

On lui associe l'application Γ_f définie par :

$\Gamma_f(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$;

$\Gamma_f(x) = \int_0^{+\infty} x^t.f(t).dt$ si $x \in [0,1[$;

$\Gamma_f(x) = 1$ si $x \in [1, +\infty[$.

Montrer que Γ_f est bien une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, croissante et positive.

2) Etant donnée une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0,+\infty[$ et définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ admettant comme densité f, on note $\hat{Y}$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ à valeurs dans [0,1], telle que :

$$\forall y \in [0,1[\ ,\ \mathbf{P}(\hat{Y} \leq y) = \Gamma_f(y) = \int_0^{+\infty} y^t.f(t).dt$$

Déterminer une densité de $\hat{Y}$ dans les trois cas suivants :

(i) Y suit une loi uniforme sur [0,1] : $\mathcal{U}_{[0,1]}$,

(ii) Y suit une loi triangulaire sur [0,2], de densité f définie par :
$f(t) = 0$ pour $t < 0$ ou $t > 2$, $f(t) = t$ si $t \in [0,1]$, et $f(t) = (2 - t)$ si $t \in [0,2]$,

(iii) Y suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$: $\mathcal{E}(\lambda)$.

3) Soit U une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, de loi uniforme sur [0,1[. Soit $\lambda > 0$.

(i) Quelle est la loi de $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$?

(ii) Déterminer la loi de $X = [V] + 1$, où [V] désigne la partie entière de V.

(iii) Déterminer une densité de $M = V - [V]$, et l'espérance de M.

(iv) Déterminer une densité de $\tilde{X}$ (voir II.1) et une densité de $\hat{V}$ (voir III.2).

(v) Déterminer une densité de $D = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - M)$.

(vi) Déterminer la fonction de répartition de $C = \min(1,V)$, et vérifier que :

$$\mathbf{P}(2.C^2 - 3.C \geq -1) \geq \frac{1}{2}.$$

(vii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = -\frac{n}{\lambda}\ln(1 - U)$, $M_n = V_n - [V_n]$.

Pour tout réel t, trouver $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(M_n \leq t)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?